

Irreversible k-Threshold Conversion Number of the Strong Product of Two Paths when $k = 2, 3$

Dr. Ramy Shaheen*

Dr. Suhail Mahfud**

Ali Kassem***

(Received 8 / 2 / 2022. Accepted 2 / 6 / 2022)

□ ABSTRACT □

The irreversible k-threshold conversion process on a simple and finite graph $G = (V, E)$ is an iterative process which starts by choosing a set $S_0 \subseteq V$, and for each step $t(t = 1, 2, \dots)$, S_t is obtained from S_{t-1} by adjoining all vertices that have at least k neighbors in S_{t-1} . S_0 is called the seed set of the k-threshold conversion process and is called an irreversible k-threshold conversion set (IkCS) of G if $S_t = V(G)$ for some $t \geq 0$. The minimum cardinality of all the IkCSs of G is referred to as the irreversible k-threshold conversion number of G and is denoted by $C_k(G)$. In this paper, we determine the irreversible k-threshold conversion number of the strong product of two paths P_m and P_n for $m = 2, 3$ and arbitrary n when $k = 2, 3$.

Keywords: path, strong product, conversion threshold, irreversible conversion set, irreversible conversion number.

* Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: shaheenramy2010@hotmail.com.

** Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: mahfudsubail@gmail.com.

*** Postgraduate Student (Ph.D.), Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: ali.j.kassem@tishreen.edu.sy.

عدد التحول غير العكوس وفق عتبي الانتشار $k = 2, 3$ للجداء القوي لمسارين

* د. رامي شاهين

** د. سهيل محفوظ

*** علي قاسم

(تاريخ الإيداع 8 / 2 / 2022. قُبِلَ للنشر في 2 / 6 / 2022)

□ ملخص □

إن عملية انتشار التحول غير العكوس وفق عتبة الانتشار k في البيان المنتهي البسيط $G = (V, E)$ هي عملية تكرارية تبدأ باختيار مجموعة جزئية من الرؤوس $S_0 \subseteq V$ ، ومن أجل أي خطوة $t (t = 1, 2, \dots)$ فإن S_t تنتج من S_{t-1} بإضافة جميع الرؤوس التي تجاور k رأساً على الأقل من S_{t-1} . تسمى S_0 مجموعة بذرة عملية التحول غير العكوس وفق العتبة k ونقول عن S_0 إنها مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة k (IkCS) للبيان G إذا تحقق $S_t = V(G)$ من أجل قيمة ما $t \geq 0$. يسمى عدد عناصر أصغر مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة k للبيان G بعدد التحول غير العكوس وفق العتبة k للبيان G ويرمز له بالرمز $G_k(G)$. نوجد في هذا البحث عدد التحول غير العكوس وفق كل من العتبتين $k = 2, 3$ في الجداء القوي لمسارين P_m و P_n من أجل $m = 2, 3$ و n كيفي.

الكلمات المفتاحية: مسار، الجداء القوي، عتبة انتشار التحول، مجموعة تحول غير عكوس، عدد تحول غير عكوس.

* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية. shaheenramy2010@hotmail.com

** مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية. mahfudsuhail@gmail.com

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية. ali.j.kassem@tishreen.edu.sy

مقدمة:

تعد الرياضيات المنقطعة فرعاً هاماً من فروع الرياضيات حيث تعنى بدراسة البنى الرياضية التي تكون منقطعة أساساً، بمعنى أنها لا تستدعي وجود صفة الاتصال ولا تتطلبه لكي تدرس هذا الموضوع. من أهم هذه البنى المنقطعة هي البيانات (Graphs). إن عمليات انتشار التحول غير العكوس تعنى بدراسة إمكانية انتشار تغيير أحادي الاتجاه (من الحالة 0 إلى الحالة 1) في مجتمع معين (مثل انتشار عدوى مرضية في مجتمع سكاني، انتشار رأي معين في شبكة اجتماعية...) حيث يتم تحديد قاعدة انتشار التحول في بداية الدراسة. يمكن تطبيق هذه العمليات على البيانات (Graphs) البسيطة المنتهية والمترابطة، فعلى سبيل المثال يمكن أن تمثل مجموعة رؤوس البيان مجموعة الأفراد الذين ندرس انتشار التحول عليهم، فيما تمثل مجموعة أضلاع البيان العلاقات بين هؤلاء الأفراد.

نعرف [1] عملية انتشار التحول غير العكوس وفق العتبة k (Irreversible k -threshold conversion process) في البيان المنتهي البسيط $G = (V, E)$ بأنها عملية تكرارية تبدأ في الخطوة $t = 0$ باختيار مجموعة $S_0 \subseteq V$ ، ومن أجل أي خطوة $t (t = 1, 2, \dots)$ فإن S_t تنتج من S_{t-1} بإضافة جميع الرؤوس التي تجاور k رأساً على الأقل من S_{t-1} . تسمى S_0 مجموعة بذرة عملية التحول غير العكوس وفق العتبة k ونقول عن S_0 إنها مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة k (IkCS) للبيان G إذا تحقق $S_t = V(G)$ من أجل قيمة ما $t \geq 0$. تم تعريف عدد التحول غير العكوس وفق العتبة k للبيان G في [1] بأنه عدد عناصر أصغر مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة k للبيان G ويرمز له بالرمز $C_k(G)$. يتضح من التعريف أن:

$$C_k(G) \geq k \quad (1)$$

كذلك يتضح أن $1 \leq k \leq \Delta(G)$ حيث تمثل $\Delta(G)$ أكبر درجة رأس في البيان G . كذلك يتضح أن $C_1(G) = 1$ إذا كان G بياناً مترابطاً.

قدم Dreyer و Roberts [1] أول نموذج بياني للتحويلات غير العكوسة وفق العتبة k وأوجدوا C_2 للمسارات والحلقات. درس آخرون نفس المفهوم في الأوراق البحثية [2,3,4,5,6]. أوجد كل من Adams وآخرون في [4] حداً أعلى لعدد التحول غير العكوس وفق العتبة k للجداء المباشر لبيانين معينين. أوجد Mynhardt و Wodlinger في [7] حداً أعلى لعدد التحول غير العكوس وفق العتبة k في البيانات المنتظمة من الدرجة $k + 1$.

يعرف الجداء القوي لبيانين $G = (V_1, E_1)$ و $H = (V_2, E_2)$ والذي يرمز له بـ $G \boxtimes H$ بالشكل التالي [8]:
 $V(G \boxtimes H) = V(G \times H)$ حيث $G \times H$ هو الجداء الديكارتي للبيانين G و H ، ويتجاوز الرأسان (u, u_1) و (v, v_1) في $G \boxtimes H$ إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

- u يجاور v و $u_1 = v_1$.
- $u = v$ و u_1 يجاور v_1 .
- u يجاور v و u_1 يجاور v_1 .

عند تمثيل البيان $P_m \boxtimes P_n$ لدراسة عمليات انتشار التحول سنعتبر أن الدوائر السوداء تشير إلى رؤوس البيان المتحولة أما الدوائر البيضاء فتشير إلى الرؤوس التي لم تتحول بعد.

أهمية البحث وأهدافه:

تتجلى أهمية هذا البحث من وجهة نظر رياضية نظرية في حل مشكلة إيجاد أقل عدد من رؤوس البيان G التي يجب تحويلها في الخطوة الابتدائية $t = 0$ (والتي هي رؤوس مجموعة بذرة عملية انتشار التحول S_0) بحيث تشكل S_0 مجموعة تحول غير عكوسة وفق العتبة k للبيان G . أما من الناحية التطبيقية فللبحث أهمية كبيرة في مجال علم الأوبئة (epidemiology) ومكافحة الإرهاب البيولوجي وذلك عن طريق إيجاد أصغر بذرة انتشار عدوى تشكل IkCS في مجتمع معين ومحاولة حمايتها من استهداف الإرهاب البيولوجي كون إصابة أي رأس من رؤوس هذه المجموعة بالعدوى يكفل انتشار الإصابة في المجتمع بأكمله، وفي مجال التسويق الإلكتروني واسع الانتشار (viral marketing). يهدف البحث إلى إيجاد عدد التحول غير العكوس وفق كل من العتبتين $k = 2, 3$ في الجداء القوي لمسارين P_m و P_n من أجل $m = 2, 3$ و n كيفي.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد آلية البحث على الاستفادة من الخواص الشكلية للجداء القوي لمسارين ومفهوم عدد التحول غير العكوس ذو العتبة k في البيان.

النتائج والمناقشة:

نقدم في هذا المقال أربع مبرهنات لإيجاد عدد التحول غير العكوس وفق عتبتين الانتشار $k = 2, 3$ في الجداء القوي لمسارين $P_m \boxtimes P_n$ من أجل $m = 2, 3$ و n عدد كيفي، كما نقدم تمهيديتين تفيدان في البرهان.

مبرهنة 1: أيًا كانت $n \geq 2$ فإن $C_2(P_2 \boxtimes P_n) = 2$.

البرهان:

سنحاول إيجاد مجموعة بذرة تحول غير عكوس وفق العتبة 2 لـ $P_2 \boxtimes P_n$ بحيث يكون عدد عناصرها يساوي 2. نميز الحالتين التاليتين:

(1) عدد زوجي.

لتكن مجموعة البذرة $S_0 = \{(1, \frac{n}{2}), (2, \frac{n}{2} + 1)\}$ ، عندئذ تتم عملية انتشار التحول وفق الخطوات التالية:

$$t = 0: S_0 = \{(1, \frac{n}{2}), (2, \frac{n}{2} + 1)\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(1, \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2})\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n}{2} - 1), (1, \frac{n}{2} + 2), (2, \frac{n}{2} - 1), (2, \frac{n}{2} + 2)\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $3 \leq t \leq \frac{n}{2}$:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n}{2} - t + 1), (1, \frac{n}{2} + t), (2, \frac{n}{2} - t + 1), (2, \frac{n}{2} + t)\}$$

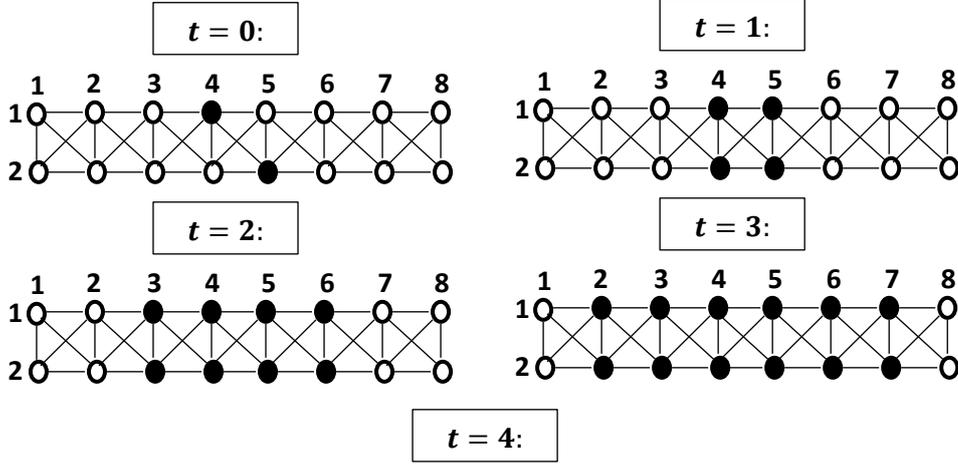
$$= \{(1, j), (2, j): \frac{n}{2} - t + 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + t\}.$$

تبلغ عملية التحول الانتشار الكامل على كافة رؤوس البيان في الخطوة $t = \frac{n}{2}$ بحيث:

$$S_{\frac{n}{2}} = S_{\frac{n}{2}-1} \cup \{(1, \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1), (1, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}), (2, \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2} + \frac{n}{2})\}$$

$$= \{(1, j), (2, j): 2 \leq j \leq n - 1\} \cup \{(1, 1), (1, n), (2, 1), (2, n)\} = V(P_2 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن S_0 تشكل مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة 2 للبيان $P_2 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_2(P_2 \boxtimes P_n) \leq 2$ ونعلم من (1) أن $C_2(P_2 \boxtimes P_n) \geq 2$ وبالتالي $C_2(P_2 \boxtimes P_n) = 2$ من أجل قيم n الزوجية. يوضح الشكل 1 الحالة 1 حيث نعرض عملية انتشار تحول غير عكوس وفق العتبة 2 على البيان $P_2 \boxtimes P_8$ انطلاقاً من مجموعة البذرة $S_0 = \{(1,4), (2,5)\}$.



(2) عدد فردي.

لنكن مجموعة البذرة $S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (2, \frac{n+1}{2})\}$ ، عندئذ تتم عملية انتشار التحول وفق الخطوات التالية:

$$t = 0: S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (2, \frac{n+1}{2})\}. \quad (C_2(P_2 \boxtimes P_8) = 2 \text{ يوضح أن } (1, \frac{n+1}{2}), (2, \frac{n+1}{2}))$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(1, \frac{n-1}{2}), (1, \frac{n+3}{2}), (2, \frac{n-1}{2}), (2, \frac{n+3}{2})\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n-3}{2}), (1, \frac{n+5}{2}), (2, \frac{n-3}{2}), (2, \frac{n+5}{2})\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $3 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n-2t+1}{2}), (1, \frac{n+2t+1}{2}), (2, \frac{n-2t+1}{2}), (2, \frac{n+2t+1}{2})\}$$

$$= \{(1, j), (2, j): \frac{n-2t+1}{2} \leq j \leq \frac{n+2t+1}{2}\}.$$

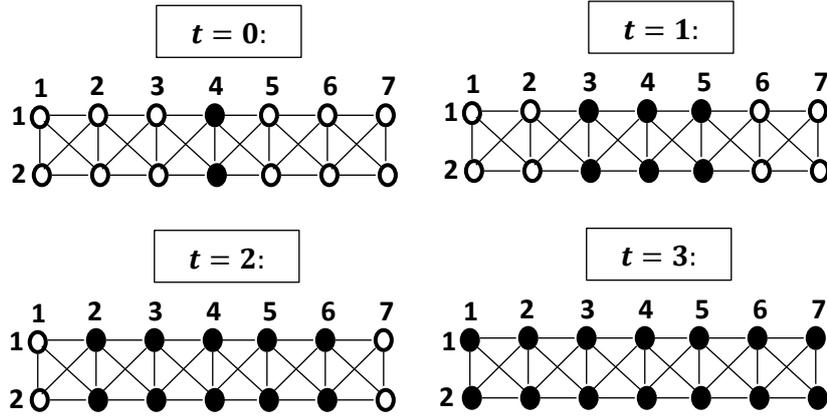
تبلغ عملية التحول الانتشار الكامل على كافة رؤوس البيان في الخطوة $t = \frac{n-1}{2}$ حيث:

$$S_{\frac{n-1}{2}} = S_{\frac{n-3}{2}} \cup \{(1, \frac{n-2(\frac{n-1}{2})+1}{2}), (1, \frac{n+2(\frac{n-1}{2})+1}{2}), (2, \frac{n-2(\frac{n-1}{2})+1}{2}), (2, \frac{n+2(\frac{n-1}{2})+1}{2})\}$$

$$= \{(1, j), (2, j): 2 \leq j \leq n-1\} \cup \{(1,1), (1,n), (2,1), (2,n)\} = V(P_2 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن S_0 تشكل مجموعة تحول غير عكوس وفق العتبة 2 للبيان $P_2 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_2(P_2 \boxtimes P_n) \leq 2$ ولكن من (1) لدينا $C_2(P_2 \boxtimes P_n) \geq 2$ وبالتالي $C_2(P_2 \boxtimes P_n) = 2$ من أجل قيم n الفردية. يوضح الشكل 2 مراحل الحالة 2 على $P_2 \boxtimes P_7$.

من تحقق الحالتين 1 و 2 نستنتج أن $C_2(P_2 \boxtimes P_n) = 2$ أيًا كانت $n \geq 2$.



(الشكل 2 يوضح أن $C_2(P_2 \boxtimes P_7) = 2$)

تمهيدية 1: ليكن البيان $P_2 \boxtimes P_n$ حيث $n \geq 2$ خاضعاً لعملية انتشار تحول غير عكوس وفق العتبة 3 ولنكن S_0 مجموعة البذرة لهذه العملية، إذا وجد عمودان متجاوران من $P_2 \boxtimes P_n$ بحيث لا يحتوي أي منهما على رأس من S_0 فإن التحول لن ينتشر إلى أي رأس من رؤوسهما خلال أي خطوة من خطوات عملية الانتشار.

البرهان:

ليكن البيان $P_2 \boxtimes P_n$ حيث $n \geq 2$ خاضعاً لعملية انتشار تحول غير عكوس وفق العتبة 3 وليكن j عدداً كيفياً يحقق $1 \leq j \leq n - 1$. لنكن U مجموعة رؤوس العمودين اللذين دليلاهما $j, j + 1$. لنفرض الآن أن بذرة التحول $S_0 = V(P_2 \boxtimes P_n) - U = V(P_2 \boxtimes P_n) - \{(1, j), (1, j + 1), (2, j), (2, j + 1)\}$

من الواضح أن S_0 هي أكبر بذرة تحقق $S_0 \cap U = \emptyset$. نميز الحالات التالية:

(1) من أجل $2 \leq j \leq n - 2$:

نلاحظ أن كل رأس $u \in U$ يجاور ثلاثة رؤوس غير متحولة هي رؤوس المجموعة $U - \{u\}$ ورأسين متحولين من المجموعة $\{(1, j - 1), (1, j + 2), (2, j - 1), (2, j + 2)\}$ كما يوضح الشكل 3، بالتالي لا يحقق أي رأس من U قاعدة التحول وهي مجاورة ثلاثة رؤوس متحولة على الأقل. نستنتج أن $S_1 = S_0 \neq V(P_2 \boxtimes P_n)$ وبالتالي يتوقف انتشار التحول عند حدود S_0 وتقتل العملية. مع الحفاظ على العمومية نلاحظ أن أوسع انتشار ممكن للتحول في هذه الحالة هو $V(P_2 \boxtimes P_n) - U$ مهما كانت البذرة المختارة.

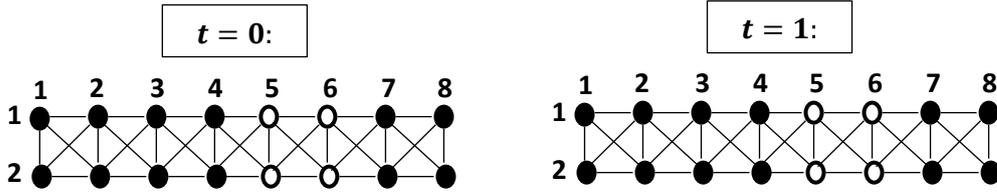
(2) من أجل $j = 1$:

في هذه الحالة نلاحظ أن كلاً من رأسي العمود الأول يجاور ثلاثة رؤوس فقط هي رؤوس المجموعة $U - \{u\}$ غير المتحولة في حين أن كلاً من رأسي العمود الثاني يجاور ثلاثة رؤوس غير متحولة هي رؤوس $U - \{u\}$ ورأسين متحولين هما $(1, 3), (2, 3)$. نستنتج أن أي رأس $u \in U$ لا يحقق قاعدة التحول أي $S_1 = S_0 \neq V(P_2 \boxtimes P_n)$ والعملية تقتل. بشكل مشابه للحالة 1 نلاحظ أن أوسع انتشار ممكن للتحول هو $V(P_2 \boxtimes P_n) - U$ مهما كانت البذرة المختارة.

(3) من أجل $j = n - 1$:

بشكل مشابه للحالة 2 نلاحظ أن كلاً من رأسي العمود n يجاور ثلاثة رؤوس فقط هي رؤوس المجموعة $U - \{u\}$ غير المتحولة في حين أن كلاً من رأسي العمود $n - 1$ يجاور ثلاثة رؤوس غير متحولة هي رؤوس $U - \{u\}$ ورأسين متحولين هما $(2, n - 2), (1, n - 2)$. نستنتج أن أي رأس $u \in U$ لا يحقق قاعدة التحول ومنه تفشل عملية انتشار التحول في بلوغ كافة رؤوس البيان. بشكل مشابه للحالتين السابقتين فأن أوسع انتشار ممكن للتحول هو $V(P_2 \boxtimes P_n) - U$ مهما كانت البذرة المختارة. من تحقق الحالات الثلاث نستنتج المطلوب.

يوضح الشكل 3 فشل عملية انتشار التحول على كافة رؤوس $P_2 \boxtimes P_8$ عند وجود عمودين متتاليين (العمودين الخامس والسادس) غير حاويين على أي رأس من البذرة S_0 .



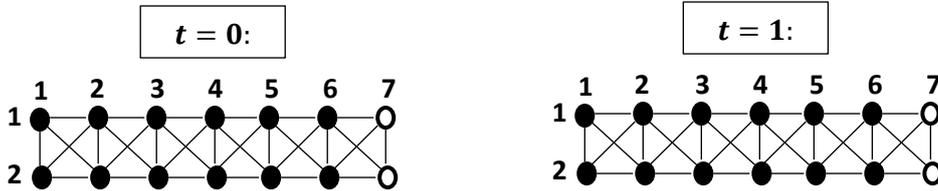
(الشكل 3 يظهر فشل عملية الانتشار عند وجود عمودين متجاورين غير حاويين على رؤوس من S_0)

تمهيدية 2: ليكن البيان $P_2 \boxtimes P_n$ حيث $n \geq 2$ خاضعاً لعملية انتشار تحول غير عكوس وفق العتبة 3 ولتكن S_0 مجموعة البذرة لهذه العملية، إذا وجد عمود طرفي من $P_2 \boxtimes P_n$ لا يحتوي على أي رأس من S_0 فإن التحول لن ينتشر إلى أي رأس من رأسيه خلال أي خطوة من خطوات عملية الانتشار.

البرهان:

بألية مشابهة لبرهان تمهيدية 1 لنفرض أن بذرة عملية التحول هي المجموعة $S_0 = V(P_2 \boxtimes P_n) - U$ حيث $U = \{(1,1), (2,1)\}$ هي مجموعة رؤوس العمود الأول. نلاحظ أن كل رأس $u \in U$ يجاور رأساً غير متحول هو الرأس الوحيد لـ $U - \{u\}$ ورأسين متحولين هما $(1,2), (2,2)$ وبالتالي أي رأس $u \in U$ لا يحقق قاعدة التحول أي $S_1 = S_0 \neq V(P_2 \boxtimes P_n)$ والعملية تفشل ولأن S_0 المختارة هي أكبر بذرة تحقق $S_0 \cap U = \emptyset$ فإن أوسع انتشار ممكن للتحول هو $V(P_2 \boxtimes P_n) - U$ مهما كانت البذرة المختارة. باتباع نفس المناقشة من أجل $U = \{(1,n), (2,n)\}$ التي تمثل مجموعة رؤوس العمود الأخير نتوصل إلى النتيجة نفسها ومنه نستنتج صحة التمهيدية.

يظهر الشكل 4 فشل عملية انتشار التحول على كافة رؤوس $P_2 \boxtimes P_7$ عند وجود عمود طرفي (العمود السابع) غير حاوٍ على أي رأس من البذرة S_0 .



(الشكل 4 يوضح فشل عملية الانتشار عند وجود عمود طرفي غير حاوٍ على رأس من S_0)

مبرهنة 2: أيًا كان العدد الصحيح $n \geq 3$ فإن $C_3(P_2 \boxtimes P_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$.

البرهان:

يتضح من تمهيدية 1 وتمهيدية 2 أن عدم وجود عمودين متتاليين خاليين من رؤوس البذرة وكذلك عدم وجود عمود طرفي خالي من رؤوس البذرة هما شرطان لازمان لكي تكون بذرة انتشار التحول وفق العتبة 3 مجموعة تحول غير عكوسة (I3CS) وبالتالي بهدف تحقيق الشرطين سنفرض وجود رأس من البذرة في كل عمود ذي دليل فردي إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً، أما إذا كان n عدداً زوجياً سنفرض وجود رأس من البذرة في كل عمود ذي دليل فردي وسنضيف إلى البذرة رأساً من رأسي العمود الأخير ذي الدليل الزوجي، ومنه نستنتج أن $C_3(P_2 \boxtimes P_n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
 لتكن D_0 بذرة انتشار تحول غير عكوس وفق العتبة 3 على $P_2 \boxtimes P_n$ وليكن $|D_0| = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ بحيث تتضمن D_0 :

i. رأساً من كل عمود ذي دليل فردي إذا كان n عدداً فردياً.
 ii. رأساً من كل عمود ذي دليل فردي بالإضافة إلى رأس من العمود الأخير ذي الدليل الزوجي إذا كان n عدداً زوجياً.

عندئذ يمكن تقسيم مجموعة الرؤوس غير المتحركة $V - D_0$ إلى المجموعات الجزئية التالية:

• مجموعات تتضمن الرؤوس الواقعة على أعمدة غير طرفية ذات ترقيم زوجي وهي:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, j): (1, j-1), (1, j+1) \in D_0\}, \\ X_2 &= \{(1, j): (1, j-1), (2, j+1) \in D_0\}, \\ X_3 &= \{(1, j): (2, j-1), (1, j+1) \in D_0\}, \\ X_4 &= \{(1, j): (2, j-1), (2, j+1) \in D_0\}, \\ X_5 &= \{(2, j): (1, j-1), (1, j+1) \in D_0\}, \\ X_6 &= \{(2, j): (1, j-1), (2, j+1) \in D_0\}, \\ X_7 &= \{(2, j): (2, j-1), (1, j+1) \in D_0\}, \\ X_8 &= \{(2, j): (2, j-1), (2, j+1) \in D_0\}. \end{aligned}$$

• مجموعات تتضمن الرؤوس الواقعة على أعمدة غير طرفية ذات ترقيم فردي وهي:

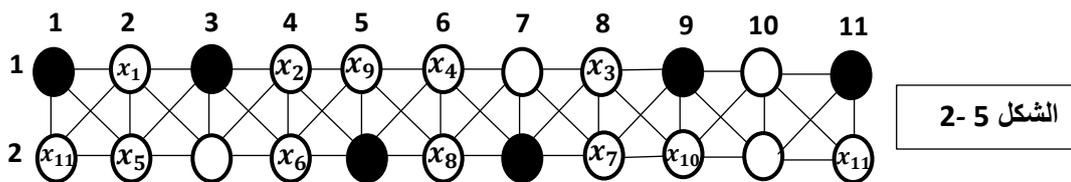
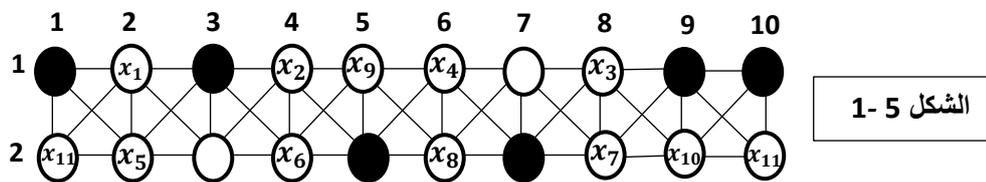
$$\begin{aligned} X_9 &= \{(1, j): (2, j) \in D_0\}, \\ X_{10} &= \{(2, j): (1, j) \in D_0\}. \end{aligned}$$

• مجموعة X_{11} تتضمن الرؤوس التالية تبعاً لقيمة العدد الصحيح n :

■ الرأس غير المتحول من العمود الأول والرأس غير المتحول من العمود الأخير ذي الدليل الفردي إذا كان n عدداً فردياً.

■ الرأس غير المتحول من العمود الأول والرأس غير المتحول من العمود الأخير ذي الدليل الزوجي إذا كان n عدداً زوجياً.

يظهر الشكل 1-5 رأساً $x_i \in X_i$ من كل مجموعة X_i حيث $1 \leq i \leq 10$ بالإضافة إلى رأسي المجموعة X_{11} وذلك من أجل قيمة زوجية n وهي $n = 10$ فيما يظهر الشكل 2-5 المقادير نفسها من أجل قيمة فردية n وهي $n = 11$.



(الشكل 5 يظهر مثلاً عن كل $x_i \in X_i$ حيث $1 \leq i \leq 10$ بالإضافة إلى X_{11})

نلاحظ أن مجموعات الرؤوس غير المتحولة X_i حيث $1 \leq i \leq 11$ تحقق ما يلي:

$$|N(v) \cap D_0| = 2. \text{ فإن } 1 \leq i \leq 8 \text{ حيث } v \in X_i$$

$$|N(v) \cap D_0| = 1. \text{ فإن } 9 \leq i \leq 10 \text{ حيث } v \in X_i$$

$$|N(v) \cap D_0| = 1. \text{ فإن } v \in X_{11} \text{ و } n \text{ فردي}$$

$$|N(v) \cap D_0| = 1 \text{ فإن زوجي}$$

$$|N(v) \cap D_0| = 2 \text{ فإن زوجي}$$

ومنه نستنتج عدم وجود أي رأس غير متحول يجاور ثلاثة رؤوس متحولة من D_0 وبالتالي تفشل عملية انتشار التحول لعدم وجود أي رأس يحقق قاعدة التحول. إذاً D_0 ليست I3CS على $P_2 \boxtimes P_n$ وبما أن D_0 تمثل الحالة العامة لأي بذرة تحول مكونة من $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ رأس وتحقق الشرطين اللازمين من تمهيدية 1 وتمهيدية 2 نستنتج أنه أيأ كان $n \geq 3$ فإن:

$$C_3(P_2 \boxtimes P_n) > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad (2)$$

$$C_3(P_2 \boxtimes P_n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \text{ لنثبت الآن أن } C_3(P_2 \boxtimes P_n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1. \text{ نميز الحالتين التاليتين:}$$

(1) عدد فردي.

لنكن مجموعة بذرة انتشار التحول هي $S_0 = \{(1, 2l+1) : 0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{(2, n)\}$ والتي تحقق أن $|S_0| = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$. عندئذٍ تتم عملية انتشار التحول وفق الخطوات التالية:

$$t = 0: S_0 = \{(1, 2l+1) : 0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{(2, n)\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(1, n-1), (2, n-1)\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(2, n-2)\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $3 \leq t \leq n-2$ حيث t عدد صحيح فردي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, n-t), (2, n-t)\} = \{(1, 2l+1), (1, j), (2, j) : 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-t-2}{2} \right\rfloor, n-t \leq j \leq n\}.$$

من أجل الخطوات $4 \leq t \leq n-3$ حيث t عدد صحيح زوجي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(2, n-t)\} = \{(1, 2l+1), (1, j), (2, j) : 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-t-2}{2} \right\rfloor, n-t \leq j \leq n\}.$$

تبلغ عملية التحول الانتشار الكامل على كافة رؤوس البيان في الخطوة $t = n-1$ ذات الدليل الزوجي حيث:

$$S_{n-1} = S_{n-2} \cup \{(2, n - (n-1))\} = \{(1, 2l+1), (1, j), (2, j) : 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-(n-2)-2}{2} \right\rfloor,$$

$$n - (n-2) \leq j \leq n\} \cup \{(2, 1)\} = V(P_2 \boxtimes P_n).$$

$$\text{إذاً } S_0 \text{ تشكل I3CS على } P_2 \boxtimes P_n \text{ وبالتالي } C_3(P_2 \boxtimes P_n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \text{ إذا كان } n \text{ عدداً فردياً.}$$

(2) عدد زوجي.

لنكن مجموعة بذرة انتشار التحول هي $S_0 = \{(1, 2l+1) : 0 \leq l \leq \frac{n}{2} - 1\} \cup \{(1, n), (2, n)\}$ والتي تحقق

$$|S_0| = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1. \text{ عندئذٍ تتم عملية انتشار التحول وفق الخطوات التالية:}$$

$$t = 0: S_0 = \{(1, 2l+1) : 0 \leq l \leq \frac{n}{2} - 1\} \cup \{(1, n), (2, n)\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(2, n-1)\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, n-2), (2, n-2)\}.$$

من أجل الخطوات $3 \leq t \leq n-3$ حيث t عدد صحيح فردي:

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n}{2} - 1), (1, \frac{n}{2} + 2), (2, \frac{n}{2} - 1), (2, \frac{n}{2} + 2), (3, \frac{n}{2} - 1), (3, \frac{n}{2} + 2)\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $3 \leq t \leq \frac{n}{2}$:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n}{2} - t + 1), (1, \frac{n}{2} + t), (2, \frac{n}{2} - t + 1), (2, \frac{n}{2} + t), (3, \frac{n}{2} - t + 1), (3, \frac{n}{2} + t)\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n}{2} - t + 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + t\}.$$

تبلغ عملية التحول الانتشار الكامل على كافة رؤوس البيان في الخطوة $t = \frac{n}{2}$ حيث:

$$S_{\frac{n}{2}} = S_{\frac{n}{2}-1} \cup \{(1, \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1), (1, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}), (2, \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}), (3, \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1), (3, \frac{n}{2} + \frac{n}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): 2 \leq j \leq n - 1\} \cup \{(1, 1), (1, n), (2, 1), (2, n), (3, 1), (3, n)\} = V(P_3 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن S_0 تشكل I2CS على $P_3 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_2(P_3 \boxtimes P_n) \leq 2$ إذا كان n عدداً زوجياً.

(2) عدد فردي.

نختار مجموعة البذرة بالشكل $S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (3, \frac{n+1}{2})\}$ ، عندئذٍ تتم عملية الانتشار وفق الخطوات التالية:

$$t = 0: S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (3, \frac{n+1}{2})\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(2, \frac{n-1}{2}), (2, \frac{n+3}{2})\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n-1}{2}), (1, \frac{n+3}{2}), (3, \frac{n-1}{2}), (3, \frac{n+3}{2})\}.$$

$$t = 3: S_3 = S_2 \cup \{(1, \frac{n-3}{2}), (1, \frac{n+5}{2}), (2, \frac{n-3}{2}), (2, \frac{n+5}{2}), (3, \frac{n-3}{2}), (3, \frac{n+5}{2})\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $4 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$:

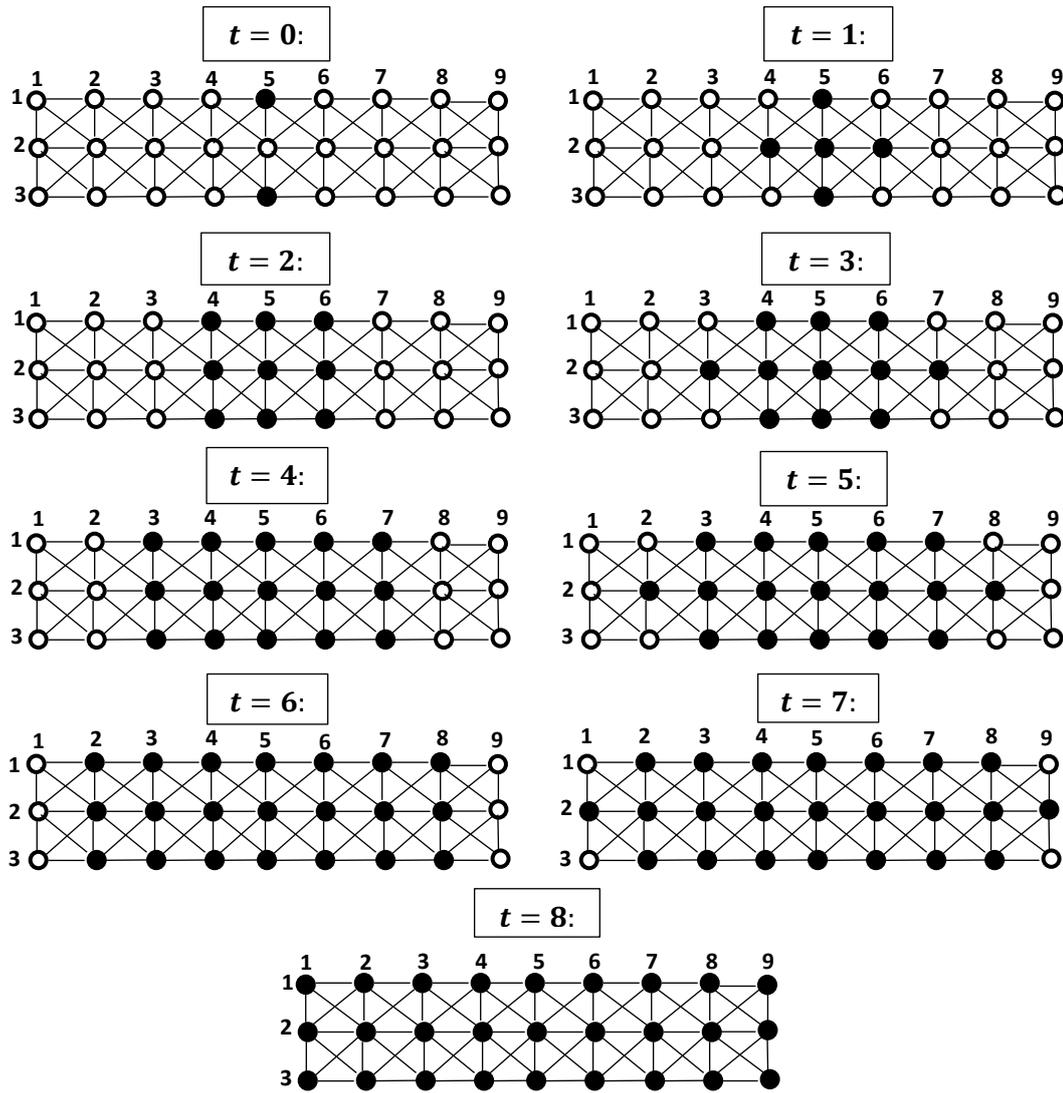
$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n-2t+3}{2}), (1, \frac{n+2t-1}{2}), (2, \frac{n-2t+3}{2}), (2, \frac{n+2t-1}{2}), (3, \frac{n-2t+3}{2}), (3, \frac{n+2t-1}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-2t+3}{2} \leq j \leq \frac{n+2t-1}{2}\}.$$

تبلغ عملية التحول الانتشار الكامل على كافة رؤوس البيان في الخطوة $t = \frac{n+1}{2}$ حيث:

$$S_{\frac{n+1}{2}} = S_{\frac{n+1}{2}-1} \cup \{(1, \frac{n-2(\frac{n+1}{2})+3}{2}), (1, \frac{n+2(\frac{n+1}{2})-1}{2}), (2, \frac{n-2(\frac{n+1}{2})+3}{2}), (2, \frac{n+2(\frac{n+1}{2})-3}{2}), (3, \frac{n-2(\frac{n+1}{2})+3}{2}), (3, \frac{n+2(\frac{n+1}{2})-1}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): 2 \leq j \leq n - 1\} \cup \{(1, 1), (1, n), (2, 1), (2, n), (3, 1), (3, n)\} = V(P_3 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن البذرة S_0 تشكل I2CS على البيان $P_3 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_2(P_3 \boxtimes P_n) \leq 2$ إذا كان n عدداً فردياً. يبين

الشكل 7 أن $C_2(P_3 \boxtimes P_9) \leq 2$.



(الشكل 7 يوضح أن $C_2(P_3 \boxtimes P_9) \leq 2$)

من الحالتين 1 و 2 نستنتج أن $C_2(P_3 \boxtimes P_n) \leq 2$ ومنه $C_2(P_3 \boxtimes P_n) = 2$ من أجل أي قيمة $n \geq 1$.

مبرهنة 4: أيًا كانت $n \geq 1$ فإن $C_3(P_3 \boxtimes P_n) = 3$.

البرهان:

نعلم من (1) أن $C_3(P_3 \boxtimes P_n) \geq 3$ ولنثبت الآن أن $C_3(P_3 \boxtimes P_n) \leq 3$. نميز الحالتين التاليتين:

(1) عدد زوجي.

نختار مجموعة البذرة $S_0 = \{(1, \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2} + 1), (3, \frac{n}{2} + 1)\}$ ، عندئذٍ تتم عملية انتشار التحول وفق

الخطوات التالية:

$$t = 0: S_0 = \{(1, \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2} + 1), (3, \frac{n}{2} + 1)\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(2, \frac{n}{2}), (2, \frac{n}{2} + 2)\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n}{2}), (1, \frac{n}{2} + 2), (3, \frac{n}{2}), (3, \frac{n}{2} + 2)\}.$$

$$t = 3: S_3 = S_2 \cup \{(2, \frac{n}{2} - 1), (2, \frac{n}{2} + 3)\}.$$

$$t = 4: S_4 = S_3 \cup \{(1, \frac{n}{2} - 1), (1, \frac{n}{2} + 3), (3, \frac{n}{2} - 1), (3, \frac{n}{2} + 3)\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $5 \leq t \leq n - 3$ حيث t عدد صحيح فردي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(2, \frac{n-t+1}{2}), (2, \frac{n+t+3}{2})\} =$$

$$\{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-t+3}{2} \leq j \leq \frac{n+t+1}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-t+1}{2}), (2, \frac{n+t+3}{2})\}.$$

من أجل الخطوات $6 \leq t \leq n - 2$ حيث t عدد صحيح زوجي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n-t+2}{2}), (1, \frac{n+t+2}{2}), (3, \frac{n-t+2}{2}), (3, \frac{n+t+2}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j):$$

$$\frac{n-t+4}{2} \leq j \leq \frac{n+t}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-t+2}{2}), (2, \frac{n+t+2}{2})\} \cup \{(1, \frac{n-t+2}{2}), (1, \frac{n+t+2}{2}), (3, \frac{n-t+2}{2}),$$

$$(3, \frac{n+t+2}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-t+2}{2} \leq j \leq \frac{n+t+2}{2}\}.$$

عند نهاية الخطوة $t = n - 2$ ذات الدليل الزوجي تكون رؤوس العمود الأخير قد تحولت جميعاً مما يعني أن جميع رؤوس

البيان قد تحولت باستثناء رؤوس العمود الأول التي تتحول في الخطوتين الأخيرتين $t = n - 1$ ذات الدليل الفردي و $t = n$

ذات الدليل الزوجي كما يلي:

$$t = n - 1: S_{n-1} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-(n-1)+3}{2} \leq j \leq \frac{n+(n-1)+1}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-(n-1)+1}{2})\}$$

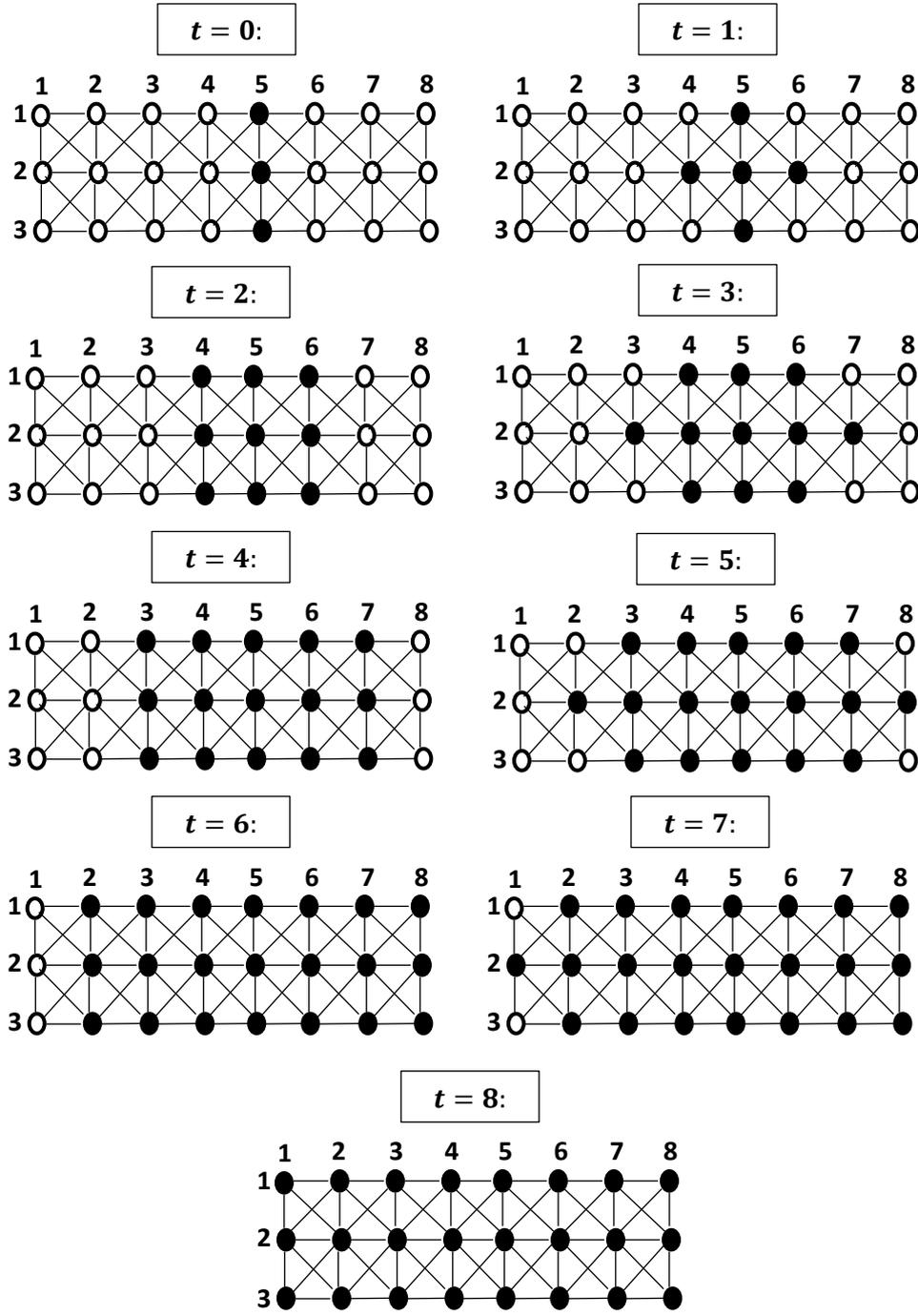
$$= \{(1, j), (2, j), (3, j): 2 \leq j \leq n\} \cup \{(2, 1)\}.$$

$$t = n: S_n = \{(1, j), (2, j), (3, j): 2 \leq j \leq n\} \cup \{(2, 1)\} \cup \{(1, \frac{n-n+2}{2}), (3, \frac{n-n+2}{2})\} =$$

$$\{(1, j), (2, j), (3, j): 1 \leq j \leq n\} = V(P_3 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن S_0 تشكل I3CS على $P_3 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_3(P_3 \boxtimes P_n) \leq 3$ إذا كان n عدداً زوجياً.

يظهر الشكل 8 أن $C_3(P_3 \boxtimes P_8) \leq 3$.



(الشكل 8 يوضح أن $(C_3(P_3 \boxtimes P_8)) \leq 3$)

(2) n عدد فردي.

لتكن مجموعة البذرة $S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (2, \frac{n+1}{2}), (3, \frac{n+1}{2})\}$ ، عندئذ تكون خطوات عملية الانتشار:

$$t = 0: S_0 = \{(1, \frac{n+1}{2}), (2, \frac{n+1}{2}), (3, \frac{n+1}{2})\}.$$

$$t = 1: S_1 = S_0 \cup \{(2, \frac{n-1}{2}), (2, \frac{n+3}{2})\}.$$

$$t = 2: S_2 = S_1 \cup \{(1, \frac{n-1}{2}), (1, \frac{n+3}{2}), (3, \frac{n-1}{2}), (3, \frac{n+3}{2})\}.$$

$$t = 3: S_3 = S_2 \cup \{(2, \frac{n-3}{2}), (2, \frac{n+5}{2})\}.$$

$$t = 4: S_4 = S_3 \cup \{(1, \frac{n-3}{2}), (1, \frac{n+5}{2}), (3, \frac{n-3}{2}), (3, \frac{n+5}{2})\}.$$

بنفس الطريقة من أجل الخطوات $5 \leq t \leq n - 2$ حيث t عدد صحيح فردي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(2, \frac{n-t}{2}), (2, \frac{n+t+2}{2})\} = \\ \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-t+2}{2} \leq j \leq \frac{n+t}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-t}{2}), (2, \frac{n+t+2}{2})\}.$$

من أجل الخطوات $6 \leq t \leq n - 1$ حيث t عدد صحيح زوجي:

$$S_t = S_{t-1} \cup \{(1, \frac{n-t+1}{2}), (1, \frac{n+t+1}{2}), (3, \frac{n-t+1}{2}), (3, \frac{n+t+1}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \\ \frac{n-t+3}{2} \leq j \leq \frac{n+t-1}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-t+1}{2}), (2, \frac{n+t+1}{2})\} \cup \{(1, \frac{n-t+1}{2}), (1, \frac{n+t+1}{2}), (3, \frac{n-t+1}{2}), \\ (3, \frac{n+t+1}{2})\} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-t+1}{2} \leq j \leq \frac{n+t+1}{2}\}.$$

عند نهاية الخطوة $t = n - 3$ ذات الدليل الزوجي تكون جميع رؤوس البيان قد تحولت باستثناء رؤوس العمودين الطرفيين حيث تحول رؤوسهما في الخطوتين الأخيرتين $t = n - 2$ ذات الدليل الفردي و $t = n - 1$ ذات الدليل الزوجي كما يلي:

$$t = n - 2: S_{n-2} = \\ \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-(n-2)+2}{2} \leq j \leq \frac{n+(n-2)}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-(n-2)}{2}), (2, \frac{n+(n-2)+2}{2})\} = \\ \{(1, j), (2, j), (3, j): 2 \leq j \leq n - 1\} \cup \{(2, 1), (2, n)\}.$$

$$t = n - 1: S_{n-1} = \{(1, j), (2, j), (3, j): \frac{n-(n-1)+3}{2} \leq j \leq \frac{n-(n-1)+1}{2}\} \cup \{(2, \frac{n-(n-1)+1}{2}), \\ (2, \frac{n+(n-1)+1}{2})\} \cup \{(1, \frac{n-(n-1)+1}{2}), (1, \frac{n+(n-1)+1}{2}), (3, \frac{n-(n-1)+1}{2}), (3, \frac{n-(n-1)+1}{2})\} = \\ \{(1, j), (2, j), (3, j): 1 \leq j \leq n\} = V(P_3 \boxtimes P_n).$$

نستنتج أن البذرة S_0 تشكل I3CS على البيان $P_3 \boxtimes P_n$ وبالتالي $C_2(P_3 \boxtimes P_n) \leq 3$ إذا كان n عدداً فردياً. من الحالتين 1 و 2 نستنتج أن $C_2(P_3 \boxtimes P_n) \leq 3$ ومنه $C_3(P_3 \boxtimes P_n) = 3$ من أجل أي قيمة $n \geq 1$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بإيجاد عدد التحول غير العكوس وفق كل من عتبي الانتشار $k = 2, 3$ في الجداء القوي لمسارين P_m و P_n من أجل $m = 2, 3$ و n كفي. وهدفنا المستقبلي هو تعميم النتيجة وإيجاد عدد التحول غير العكوس في الجداء القوي لمسارين P_m و P_n من أجل m و n كفيين وكذلك إيجاد هذا العدد للجداء القوي لمسار بحلقة والجداء القوي لحقتين وبعض البيانات الخاصة الأخرى.

References:

- [1] DREYER, P.A.; ROBERTS, JR, F.S. *Irreversible k-threshold processes: Graph theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 157, No. 7, 2009, 1615-1627.
- [2] KYN_CL, J.; LIDICK_Y, B. And VYSKO_CIL, T. *Irreversible 2-conversion set is NP-complete*, Department of Applied Mathematics (KAM), Charles University in Prague, Tec. Rep. KAM-DIMATIA Series 2009, 933-944.
- [3] CENTENO, C.C.; DOURADO, M.C.; PENSO, L.D.; Rautenbach, D And SZWARCFITER, J.L. *Irreversible Conversion of Graphs*, Theoretical Computer Science. Vol. 412, 2011, 3693-3700.

- [4] ADAMS, S.S.; BRASS, Z.; STOKES, C. And TROXELL, D.S. *Irreversible k -threshold and majority conversion processes on complete multipartite graphs and graph products*, Australasian Journal of Combinatorics. Vol. 61, 2015, 156-174.
- [5] KYN_CL, J.; LIDICK_Y, B. And VYSKO_CIL, T. *Irreversible 2-conversion set in graphs of bounded degree*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. Vol. 19, No. 3, 2017, 81-89.
- [6] FRANCES, M.D.; MYNHARDT, C.M. And WODLINGER, J.L. *Subgraph-avoiding minimum decycling sets and k -conversion sets in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics. Vol. 74, No. 3, 2019, 288-304.
- [7] MYNHARDT, C.M.; WODLINGER, J.L. *The k -conversion number of regular graphs*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, Vol. 17, No. 3, 2020, 955-965.
- [8] MOJDEH, D.A.; PETERIN, I.; SAMADI, B. And YERO, I.G. *(Open) packing number of some graph products*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. Vol. 22, No. 4, 2020, 1-17.