مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (2) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (2) 2019

# إيجاد حلول دقيقة جديدة لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني ذات الأمثال التابعة للزمن

د. سامي انجرو [*]

(تاريخ الإيداع 22 / 11 / 2018. قُبِل للنشر في 4 / 4 /2019)

## ☐ ملخّص ☐

هَدَفَ هذا البحث إلى إيجاد حلول دقيقة صريحة ذات موجة منعزلة دورية (soliton wave solutions) لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني ذات الأمثال التابعة للزمن، باستخدام طريقة *sin–cos* بتحويل موجي لاخطي ذو سرعة تابعة للزمن. أوجدنا حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي. وقدمنا أيضاً شرط لازم لوجود هذه الحلول. إن هذا النوع من الحلول الدقيقة مفيد جداً لفهم معظم الظواهر الفيزيائية غير الخطية وبشكل خاص تلك التي تعتبر تطبيق لنظرية الأمواج.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة بينامين بونا ماهوني – الحل الدقيق – طريقة *sin–cos* – الحل ذو الموجة المنعزلة – تحويل موجي – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

[*] أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (2) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (2) 2019

# Finding New Exact Solutions for Benjamin – Bona - Mahony Equation with Time-Dependent Coefficients

**Dr. Sami Injrou** [*]

**(Received 22 / 11 / 2018. Accepted 4 / 4 /2019)**

## ☐ ABSTRACT ☐

The aim of this research was to find periodic explicit soliton wave solutions for Benjamin-Bona-Mahony equation with time-dependent coefficients using the sin-cos method taking nonlinear wave transform with time dependent velocity. We found bright soliton wave solutions using a solitary wave ansatz method. We have also presented condition of existence of this solutions. This kind of solutions is very useful for understanding most nonlinear physical phenomena, especially those that are considered an application of wave theory.

**Keywords:** Benjamin-Bona-Mahony equation - exact solution - sin-cos method – soliton wave solution – wave transform - nonlinear partial differential equations.

[*] **Associate Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

## مقدمة

تعد دراسة الأمواج أحد المواضيع الأكثر بحثاً في هذه الأيام. إذ لها العديد من التطبيقات في مختلف العلوم مثل البصريات وديناميكا السوائل وفيزياء الجسيمات التي تعد تطبيقاً لنظرية الأمواج، التي تم دراستها كثيراً في [1]. يمكن أن تحدث الأمواج عند تشكيل اضطراب في وسط متوازن، فينتشر هذا الاضطراب من منطقة إلى أخرى مشكلاً موجة، وعندما تنتقل الموجة يكون لها سرعة، إذ يتم عادة تصنيف الموجة التي لا تتأثر سرعتها بسعتها بموجة خطية، في حين يقال عن موجة إنها موجة منعزلة *(soliton)* إذا كانت موجة غير خطية محلية محافظة على شكلها دون أي تغيير على طول الانتشار [2]. يمكن وصف سلوك هذه الأمواج رياضياً بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية، ومن هذه المعادلات معادلة بنيامين – بونا – ماهوني أو اختصاراً *(BBM)*، والتي لها الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+u.\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \qquad (1)$$

إذ قدمها *Benjamin* وآخرون في عام 1970 في المرجع [3] كبديل لمعادلة كورتويغ دي فاري التي تسمى اختصاراً *KdV* [4]، المعطاة بالشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+u.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (2)$$

تعرف أيضاً معادلة *BBM* بمعادلة الموجة الطويلة المنتظمة *(RLW)*، وهي قابلة للتطبيق على أمواج المياه الضحلة ودراسة أمواج الانجراف في البلازما أو أمواج *Rossby* في سوائل دوارة، وتجدر الإشارة أيضاً أنها مشتقة من قبل الباحث *Peregrine* في [5]. بصرف النظر عن التطبيقات الواسعة لمعادلة *BBM*، فقد تم استخدام العديد من الطرق التحليلية لإيجاد حلول دقيقة لها، نذكر من المراجع [6،7،8،9،10،11،12،13،14]، ثم قام في عام 2008 *Wazwaz* في [15] بحل المعادلة ذات الأمثال الثابتة من الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}-a.\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}-b\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \qquad (3)$$

حيث أن $a$ و $b$ ثابتان، إذ أوجد حلها مستخدماً طريقة الظل القطعي الزائدي الموسعة، وتم حل ذات المعادلة أيضاً في عام 2012 من قبل الباحث *Manafianheris* بطريقة منشور $G'/G$ المعممة في [16]، كذلك قدم *Das* و*Ganguly* في عام 2014 حلولاً أخرى باستخدام طريقة معدلة عن طريقة منشور $G'/G$ في [17]. في عام 2011 قدم *Singh* وأخرون في [18] صيغة أكثر عمومية من التي حلها *Wazwaz*، وهي أيضاً ذات أمثال ثابتة من الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\,\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u.\frac{\partial u}{\partial x}-\delta\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \qquad (4)$$

حيث أن $\alpha$ و $\beta$ و $\delta$ ثوابت عددية مع $\beta \neq 0$ و $\delta > 0$، فقدم *Alsayyed* وأخرون في عام 2016 في المقال [19] حلول تحليلية مستخدمين طريقة هيروتا ثنائية الخطية *(Hirota bilinear)*. وبالعودة إلى المرجع [18] تم أيضاً عرض صيغة ذات أمثال متحولة تابعة للزمن:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(t)u.\frac{\partial u}{\partial x}-\delta(t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \qquad (5)$$

حيث أن $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ و $\delta(t)$ توابع حقيقية قابلة للمكاملة، وتم تقديم حلول دقيقة لها من قبل *Jahani* و *Manahian* في عام 2016 مستخدمين طريقة الدالة الأسية المطورة [20]. سنحاول في هذه المقالة تقديم حلول

تحليلية دورية جديدة للمعادلة (5)، باستخدام طريقة *sin–cos* [12]، كما سنقدم شروط لازمة لإيجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)*، معتمدين على الطريقة المستخدمة في المرجع [21].

## أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول دورية وأخرى ذات موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني ذات الأمثال المتحولة باستخدام طريقة *sin–cos* وطريقة فرضية الحل الموجي، فهو يعتبر في غاية الأهمية، لأنه يقدم حلولاً ذات طبيعة موجية لهذه المعادلة، تساهم بشكل كبير في إعطاء الباحث فكرة وتصور عن المسألة الفيزيائية المدروسة وبشكل خاص في مجال الأمواج.

## طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

## النتائج والمناقشة:

**1– حلول دورية للمعادلة (5):**

بفرض أن حل المعادلة (5) يعطى بالعلاقة الآتية:

$$u(x,t)=\lambda(t)\cos^{b}(\mu\xi)\ \ ;\ \ \xi=x-c(t).t \qquad (6)$$

حيث أن $\xi$ متحول الموجة و $c(t)$ سرعة الموجة وهي دالة تابعة للزمن مستمرة تعين لاحقاً ومشتقها $c'(t)$ أيضاً دالة مستمرة، و $\mu$ و $b$ وسيطان يحددان لاحقاً، وبالتالي لدينا مشتقات $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\,\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)-b\,\mu\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-b\,\mu\lambda(t)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b\,(b-1)\,\mu^2\lambda(t)\cos^{b-2}(\mu\xi)-b^2\mu^2\lambda(t)\cos^{b}(\mu\xi) \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=&\ b\,(b-1)\,\mu^2\frac{d\,\lambda(t)}{dt}\cos^{b-2}(\mu\xi)-b^2\mu^2\frac{d\,\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)\\ &-b\,(b-1)(b-2)\,\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\ &-b^3\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\end{aligned} \qquad (10)$$

بتعويض (7) و(8) و(10) في المعادلة (5)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)-b\,\mu\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$-\alpha(t)b\,\mu\lambda(t)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)-\beta(t)b\,\mu\lambda^{2}(t)\cos^{2b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$-\delta(t)b\,(b-1)\,\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b-2}(\mu\xi)+\delta(t)b^{2}\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)$$
$$+\delta(t)b\,(b-1)(b-2)\,\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$+\delta(t)b^{3}\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$=0 \qquad (11)$$

للموازنة بين $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}$ الحد ذو الأعلى مرتبة اشتقاق مع الحد اللاخطي $u.\frac{\partial u}{\partial x}$ نقوم بمطابقة قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{2b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وأمثال كل زوج، فنحصل على:

$$b\,(b-1)(b-2)\neq 0 \qquad (12)$$

$$2b-1=b-3 \qquad (13)$$

$$\left(\delta(t)b^{2}\mu^{2}+1\right)\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \qquad (14)$$

$$-\delta(t)b\,(b-1)\,\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \qquad (15)$$

$$-\alpha(t)b\,\mu\lambda(t)+\left(\delta(t)b^{3}\mu^{3}\lambda(t)-b\,\mu\lambda(t)\right)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)=0 \qquad (16)$$

$$\delta(t)b\,(b-1)(b-2)\,\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)-\beta(t)b\,\mu\lambda^{2}(t)=0 \qquad (17)$$

حيث وضعنا المعادلة (12) لضمان المطابقة بين قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{2b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وتمثل المعادلة (14) أمثال $\cos^{b}(\mu\xi)$ والمعادلة (15) أمثال $\cos^{b-2}(\mu\xi)$ والمعادلة (16) أمثال $\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ والمعادلة (17) أمثال $\cos^{2b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$.

من المعادلة (13)، نجد أن $b=-2$ ومن المعادلتين (14) و(15)، نجد أن:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \qquad (18)$$

ومنه:

$$\lambda(t)=\lambda_0 \qquad (19)$$

حيث أن $\lambda_0$ ثابت.

وبحل المعادلتين (16) و(17) بعد تعويض قيمة $b=-2$ و $\lambda(t)=\lambda_0$ فيهما، نحصل على:

$$\mu=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0\beta(t)}{\delta(t)\left(\lambda_0\beta(t)-3\alpha(t)\right)}}\quad,\quad c(t)=\frac{1}{t}\int\left(\frac{-1}{3}\lambda_0\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_1 \qquad (20)$$

حيث أن $C_1$ ثابت المكاملة.

وبما أن $\mu$ وسيط عددي يمثل عدد الأمواج، إذاً يجب أن يكون:

$$\frac{\lambda_0\beta(t)}{\delta(t)\left(\lambda_0\beta(t)-3\alpha(t)\right)}=C$$

حيث أن $C$ ثابت ما. وبتعويض العلاقة (20) في (6)، نحصل على حلول دورية للمعادلة المعطاة (5):

$$u(x,t)=\lambda_0\sec^2\left[\mu\left(x+\int\left(\frac{1}{3}\lambda_0\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_1\right)\right] \qquad (21)$$

**2- حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* للمعادلة (5):**

سنعتبر هنا متحول موجي أكثر عمومية:

$$\xi=B(t)\left(x-c(t).t\right) \qquad (22)$$

حيث أن $c(t)$ سرعة الموجة المنعزلة و $B(t)$ عرض معكوس للموجة المنعزلة وهما تابعان حقيقيان سيتم تحديدها لاحقاً. ولإيجاد الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة سنتبع طريقة فرضية الحل الموجي المستخدمة في [21]، إذ سنفترض أن الحل يعطى بالشكل الآتي:

$$u(x,t)=\lambda(t)\text{sech}^p\xi \qquad (23)$$

حيث $\lambda(t)$ يمثل سعة الموجة المنعزلة و $p$ عدد صحيح موجب سيحدد لاحقاً خلال عملية إيجاد الحل.

لنوجد مشتقات (23) وفق الآتي، حيث سنكتب للاختصار $c=c(t)\ ,\ B=B(t)\ ,\ \lambda=\lambda(t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\lambda}{dt}\text{sech}^p\xi-p\lambda\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\text{sech}^p\xi\tanh\xi \qquad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-pB\lambda\text{sech}^p\xi\tanh\xi \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=B^2\lambda\left(p^2\text{sech}^p\xi-p(p+1)\text{sech}^{p+2}\xi\right) \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\left(p^2\text{sech}^p\xi-p(p+1)\text{sech}^{p+2}\xi\right)$$
$$+\lambda B^2\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\left(-p^3\text{sech}^p\xi\tanh\xi+p(p+1)(p+2)\text{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi\right) \qquad (27)$$

بتعويض (24)-(27) في المعادلة (5)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}\text{sech}^p\xi-p\lambda\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\text{sech}^p\xi\tanh\xi-\alpha pB\lambda\text{sech}^p\xi\tanh\xi$$
$$-\beta pB\lambda^2\text{sech}^{2p}\xi\tanh\xi-\delta p^2\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\text{sech}^p\xi$$
$$+\delta p(p+1)\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\text{sech}^{p+2}\xi+\delta\lambda B^2p^3\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\text{sech}^p\xi\tanh\xi$$
$$-\delta\lambda B^2p(p+1)(p+2)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\text{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi=0 \qquad (28)$$

حيث $\alpha=\alpha(t)\ ,\ \beta=\beta(t)\ ,\ \delta=\delta(t)$. للموازنة بين $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ الحد ذو الأعلى مرتبة اشتقاق مع الحد اللاخطي $u.\frac{\partial u}{\partial x}$ نقوم بمساواة قوتي $\operatorname{sech}^{2p}\xi \tanh\xi$ و $\operatorname{sech}^{p+2}\xi \tanh\xi$، نحصل على:

$$2p=p+2 \tag{29}$$

ومنه:

$$p=2 \tag{30}$$

الآن بجعل أمثال كل من $\operatorname{sech}^{p}\xi$ و $\operatorname{sech}^{p}\xi \tanh\xi$ و $\operatorname{sech}^{2p}\xi \tanh\xi$ أو $\operatorname{sech}^{p+2}\xi \tanh\xi$، و $\operatorname{sech}^{p+2}\xi$ مساوية للصفر نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}-\delta p^2\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)=0 \tag{31}$$

$$-\alpha pB\lambda+\left(\delta\lambda B^2p^3-p\lambda\right)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d\,(Bct)}{dt}\right)=0 \tag{32}$$

$$-\beta pB\lambda^2-\delta\lambda B^2p\,(p+1)(p+2)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d\,(Bct)}{dt}\right)=0 \tag{33}$$

$$\delta p\,(p+1)\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)=0 \tag{34}$$

من العلاقة (33) وبعد تعويض قيمة $p=2$ فيها، نحصل على:

$$\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d\,(Bct)}{dt}\right)=\frac{-\lambda\beta}{12\delta B} \tag{35}$$

بتعويض (35) في (32)، نحصل على:

$$-2\alpha B\lambda-\frac{2}{3}\lambda^2B\beta+\frac{1}{6}\frac{\lambda^2\beta}{\delta B}=0 \tag{36}$$

بضرب طرفي العلاقة (36) بـ $\frac{6\delta B}{\lambda}$، نحصل على:

$$B^2\left(-12\alpha\delta-4\lambda\beta\delta\right)=-\lambda\beta \tag{37}$$

ومنه:

$$B=\sqrt{\frac{\lambda\beta}{12\alpha\delta+4\lambda\beta\delta}} \tag{38}$$

وبالتالي فإن شرط وجود الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة *(bright soliton)* هو أن يكون:

$$\lambda\beta\delta\left(3\alpha+\lambda\beta\right)>0 \tag{39}$$

من العلاقة (34)، لدينا:

$$\frac{dB}{dt}=-\frac{B}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \tag{40}$$

وبتعويض (40) في العلاقة (31)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{41}$$

بالمكاملة نحصل على:

$$\lambda(t)=\lambda_0 \tag{42}$$

أي أن سعة الموجة ثابتة وهذا ما يعطي وجود الموجة المنعزلة، وهذا متطابق مع الحل الدوري في الفقرة 1، ومنه فإن العرض العكسي للموجة المنعزلة:

$$B(t)=\sqrt{\frac{\lambda_0\beta(t)}{12\alpha(t)\delta(t)+4\lambda_0\beta(t)\delta(t)}} \tag{43}$$

بقي علينا تعيين $c(t)$، ومن أجل ذلك نكتب المعادلة (32) بالشكل الآتي:

$$2\lambda\left[-\alpha B+\left(4\delta B^2-1\right)x.\frac{dB}{dt}-\left(4\delta B^2-1\right)\frac{d\left(Bct\right)}{dt}\right]=0 \tag{44}$$

بما أن $c(t)$ تابع فقط لـ $t$، بالتالي فإن $\frac{dB}{dt}=0$، ومنه لدينا المعادلتان:

$$\frac{dB}{dt}=0 \tag{45}$$

$$\frac{d\left(Bct\right)}{dt}=\frac{\alpha B}{1-4\delta B^2} \tag{46}$$

بالمكاملة نحصل على:

$$B(t)=B_0 \tag{47}$$

$$c(t)=\frac{1}{t}\left(\int\frac{\alpha(s)}{1-4\delta(s)B_0^2}ds+C_2\right) \tag{48}$$

بتعويض (47) في المعادلة (43)، نحصل على:

$$B_0^2=\frac{\lambda_0\beta(t)}{\delta(t)\left(12\alpha(t)+4\lambda_0\beta(t)\right)}>0 \tag{49}$$

ومنه:

$$\frac{\delta(t)}{\beta(t)}=\frac{\lambda_0}{B_0^2\left(12\alpha(t)+4\lambda_0\beta(t)\right)}>0 \tag{50}$$

وبالتالي يصبح شرط وجود الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة *(bright soliton)*:

$$\delta(t)\beta(t)>0 \tag{51}$$

وبالتالي يكون الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة:

$$u(x,t)=\lambda_0\operatorname{sech}^2\left(B_0\left(x-\int\frac{\alpha(s)}{1-4\delta(s)B_0^2}ds+C_2\right)\right) \tag{52}$$

وهذا الحل موجود بشرط تحقق (51) وبشرط أن يكون المقدار $\frac{\lambda_0\beta(t)}{\left(3\alpha(t)+\lambda_0\beta(t)\right)\delta(t)}$ ثابت.

بالمقارنة مع المرجع [12]، في المعادلة السابعة *(RLW)*، نحصل على ذات الحل فيما لو عوضنا $\alpha(t)=a$ و $\beta(t)=-6$ و $\delta(t)=b$ و $c(t)=c$، حيث $a$ و $b$ و $c$ ثوابت عددية، في العلاقة (21):

$$u(x,t)=\frac{a-c}{2}\sec^2\left[\sqrt{\frac{a-c}{4bc}}(x-ct)\right]\ ;\ a>c \qquad (53)$$

$$u(x,t)=\frac{a-c}{2}\csc^2\left[\sqrt{\frac{a-c}{4bc}}(x-ct)\right]\ ;\ a<c \qquad (54)$$

حيث حصلنا بحساب بسيط نتيجة التعويض، على أن $\lambda_0=\frac{a-c}{2}$ و $\mu=\sqrt{\frac{a-c}{4bc}}$ .

كذلك حصلنا على حلول أكثر عمومية من حلول المرجع [20] الذي قام بحل ذات المعادلة (5)، إذ استخدمنا في هذه المقالة متحول موجي غير خطي، في حين أنهم استخدموا متحول موجي خطي من الشكل $\xi=\ell x+ct$، كما تتطابق حلولنا مع حلول المرجع [16] في حالة $\alpha(t)=1$ و $\beta(t)=-2a$ و $\delta(t)=b$ و $c(t)=c$، حيث $a$ و $b$ و $c$ ثوابت عددية، انظر الحلول $u_7(x,t)$ و $u_{11}(x,t)$ و $u_{13}(x,t)$ و $u_{15}(x,t)$، وهي في حالة متحول موجي خطي من الشكل $\xi=x-ct$ .

## الاستنتاجات والتوصيات:

لقد حصلنا في بحثنا هذا على حلول دقيقة دورية ذات موجة منعزلة وأخرى ذات موجة منعزلة ظاهرة للمعادلة *(BBM)* ذات الأمثال التابعة للزمن، كما بينا أن بعض البارمترات الفيزيائية تحسب بدلالة أمثال المعادلة، وقدمنا شروط لازمة لوجود الحلول الدورية والحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة. تعد حلولنا الجديدة أكثر عمومية من تلك التي في المراجع، لأننا استخدمنا متحول موجي غير خطي. نأمل بأن تساعد هذه الحلول الباحثين على شرح بعض الظواهر الفيزيائية وخاصة تلك التي تعد تطبيقاً لنظرية الأمواج. يجدر بنا أن نشير أخيراً إلى أن جميع الحسابات المتعلقة بهذا العمل تمت باستخدام برنامج *Maple13*.

## المراجع


[1] M. D. Groves, *Study of Water Waves*, J. Nonlinear Math. Phys., (2004), Vol. 11, 435 460.

[2] M.J. Ablowitz, *Nonliniear Dispersive Waves: Asymptotic Analisis and solitons*, 2011, Cambridge University Press, New York.

[3] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser A, Vol. 272 (1972), pp. 47-48.

[4] D.J. Korteweg, G. De Vries, *On the change of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave*, Phil. Mag., Vol. 39 (1835), pp. 422-443.

[5] D.H. Peregrine, *Calculations of the development of an undular bore*. J. Fluid Mech. (1966), *25*, 321–330.

[6] A. S. Abdel Rady, E. S. Osman, M. Khalfallah, *The homogeneous balance method and its application to the Benjamin–Bona–Mahoney (BBM) equation*, Appl. Math. Comput., 217 (2010) 1385–1390.1

[7] A. Biswas, *1-soliton solution of the B*(*m*, *n*) *equation with generalized evolution*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14 (2009), 3226–3229.1

[8] A. Biswas, S. Konar, *Soliton perturbation theory for the generalized Benjamin-Bona-Mahoney equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 13 (2008), 703–706.1

[9] J. Nickel, *Elliptic solutions to a generalized BBM equation*, Phys. Lett. A, 364 (2007), 221–226.

[10] B. Qinsheng, *Bounded wave solutions of a generalized BBM equation with positive exponents*, Phys. Lett. A, 360 (2007), 574–581.

[11] H. Triki, M. S. Ismail, *Soliton solutions of a BBM(m, n) equation with generalized evolution*, Appl. Math. Comput., 217 (2010), 48–54.

[12] A.M . Wazwaz, *A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations*, Mathematical and Computer Modelling 40 (2004) 499-508.

[13] H. Gündoğdu and Ö. Gözükızıl, *Solving Benjamin-Bona-Mahony equation by using the sn-ns method and the tanh-coth method*, Mathematica Moravica. Vol. 21, No. 1 (2017), 95–103.

[14] M. Ramli, D. Irsalin, I. P. Iwanis and V. Halfiani, *Soliton Solution of Benjamin-Bona-Mahony Equation and Modified Regularized Long Wave Equation*, AIP Conference Proceedings 1913, 020002 (2017).

[15] A.M. Wazwaz, *The extended tanh method for new compact and noncompact solutions for the KP–BBM and the ZK–BBM equations*, Chaos, Solitons and Fractals 38 (2008) 1505–1516.

[16] J. Manafianheris, *Exact Solutions of the BBM and MBBM Equations by the Generalized (G'/G )-expansion Method Equations*, International Journal of Genetic Engineering 2012, 2(3): 28-32.

[17] A. Das, A. Ganguly, *A Variation of (G'/G)-Expansion Method: Travelling Wave Solutions to Nonlinear Equations*, International Journal of Nonlinear Science Vol.17(2014) No.3,pp.268-280

[18] K. Singh, R.K. Gupta, S. Kumar, *Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equation with variable coefficients: Similarity reductions and Painlevé analysis*. Appl. Math. Comput. (2011), *217*, 7021–7027.

[19] O. Alsayyeda, H. M. Jaradatb,c, M. M. M. Jaradatd, Z. Mustafad, F. Shatate, *Multi-soliton solutions of the BBM equation arisen in shallow water*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 1807–1814.

[20] M. Jahania and J. Manafian, *Improvement of the Exp-function method for solving the BBM equation with time-dependent coefficients*, Eur. Phys. J. Plus (2016) 131: 54.

[21] Biswas A. 1-Soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution. Phys Lett A (2008);372:4601–2.